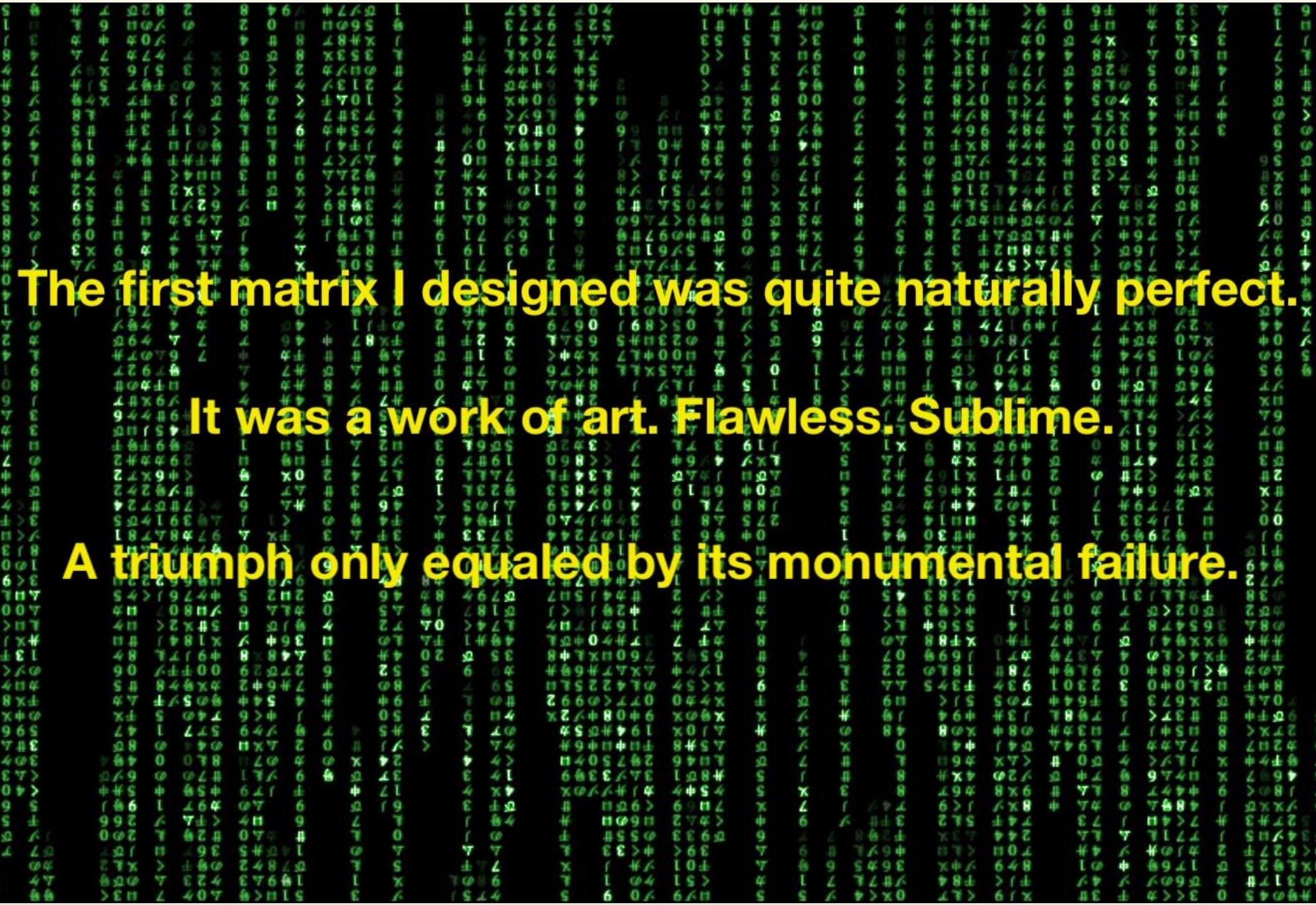
The first matrix I designed was quite naturally perfect.
It was a work of art. Flawless. Sublime.
A triumph only equaled by its monumental failure.

Opérations Elementaires

Operations sur les lignes

$M = (m_{ij})_{\substack{i \leq d' \\ j \leq d}}$ la i-ieme ligne $L_i(M) = (m_{ij})_{j=1\cdots d}$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & & m_{1d} \\ \vdots & & \\ m_{i1} & m_{i2} \cdots & m_{id} \\ \vdots & & m_{d'd} \end{pmatrix} \longrightarrow L_i = (m_{i1}\, m_{i2} \cdots m_{id})$$

DÉFINITION 9.1. *Les operations elementaires sur les lignes d'une matrice sont les applications suivantes de $M_{d' \times d}(K)$ vers $M_{d' \times d}(K)$: pour $i, j \in \{1, \cdots, d'\}$ et $\lambda \in K^\times$ et $\mu \in K$*

(I) Transposition: Echanger deux lignes $i \neq j \leqslant d'$ de M:

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

(II) Dilatation: Multiplier la i-eme ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$:

$$L_i \to \lambda . L_i .$$

(III) Combinaison Lineaire: Additionner a la ligne i un multiple scalaire de la la j-ieme ligne pour $i \neq j$: $\mu \in K$

$$L_i \to L_i + \mu L_j$$

PROPOSITION 9.1. *Ces trois operations sont des applications lineaires bijectives*

$$(I), (II), (III) : \ M_{d' \times d}(K) \mapsto M_{d' \times d}(K).$$

PROPOSITION 9.2. *Les trois operations elementaires sont obtenues par multiplication a gauche de M par des matrices convenables: pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant d'$*

(I) $T_{ij}.\bullet : M \mapsto T_{ij}.M$
(II) $D_{i,\lambda}.\bullet : M \mapsto D_{i,\lambda}.M$
(III) $Cl_{ij,\mu}.\bullet : M \mapsto Cl_{ij,\mu}.M$.

ou les matrices carrees $T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu} \in M_{d'}(K)$ *sont definies par:*

$$T_{ij} = \mathrm{Id}_{d'} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

$$D_{i,\lambda} = \mathrm{Id}_{d'} + (\lambda - 1).E_{ii},\ \lambda \neq 0$$

$$Cl_{ij,\mu} = \mathrm{Id}_{d'} + \mu.E_{ij},\ i \neq j \ ou\ \mu \neq -1 \ si\ i = j.$$

DÉFINITION 9.2. *Les matrices*

$$T_{ij},\ D_{i,\lambda},\ \lambda \neq 0,\ Cl_{ij,\mu}$$

pour $i, j \leqslant d'$, $\lambda \neq 0$, *et si* $i = j$, $\mu \neq -1$ *sont appellees matrices de transformations elementaires.*

DÉFINITION 9.3. *On dit que N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est ligne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices des transformations elementaires telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a gauche par cette suite de matrices.

Ex: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \simeq$ Ligne-equiv $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Car $K \neq 2$.

PROPOSITION 9.3. *La relation etre "ligne-equivalente" est une relation d'equivalence sur* $M_{d' \times d}(K)$.
– De plus deux matrices M, N *ligne-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 7.10.*

COROLLAIRE. *Si* M *et* N *sont lignes equivalentes alors*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N).$$

Par contre equivalente
$\not\Rightarrow$ ligne-equivalente

PROPOSITION 9.4. *Si $N \in M_{d' \times d}(K)$ est ligne-equivalente a M alors toute ligne de N est combinaison lineaire des lignes de M:*

$$\forall i \leqslant d',\ \mathrm{Lig}_i(N) \in \langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M) \rangle \subset K^d$$

et inversement les lignes de M sont combinaisons lineaires des lignes de N. En particulier les SEV engendres par les lignes de M et de N sont les memes

$$\langle \mathrm{Lig}_1(M), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(M) \rangle = \langle \mathrm{Lig}_1(N), \cdots, \mathrm{Lig}_{d'}(N) \rangle \subset K^d$$

Echelonnage

DÉFINITION 9.4. *Une matrice $M = (m_{ij}) \in M_{d' \times d}(K)$ est echelonnee si elle est nulle ou bien si*

(1) Il existe $1 \leqslant r \leqslant d$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant d$ tels que

- *Pour la ligne L_1, le premier terme non-nul est le j_1-ieme: on a $m_{1j} = 0$ pour tout $j < j_1$ et $m_{1j_1} \neq 0$,*
- *Pour la ligne L_2, le premier terme non-nul est le j_2-ieme: on a $m_{2j} = 0$ pour tout $j < j_2$ et $m_{2j_2} \neq 0$,*
- $\vdots$
- *Pour la ligne L_r, le premier terme non-nul est le j_r-ieme: on a $m_{rj} = 0$ pour tout $j < j_r$ et $m_{rj_r} \neq 0$*

(2) Si $r < d$ les lignes $L_{r+1}, \cdots, L_{d'}$ sont toutes nulles.

Si M est non-nulle les $j_1 < \cdots < j_r$ sont appeles les <u>echelons</u> de M et les m_{ij_i}, $1 \leqslant i \leqslant r$ sont les <u>pivots</u> de M.

$$\begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \cdots & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & m_{24} & \cdots & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{35} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=3$ $d_1=2$ $d_2=4$ $d_3=5$

DÉFINITION 9.5. *Une matrice est <u>echelonnee reduite</u> si le seul coefficient non-nul d'une colonne contenant un pivot est le pivot lui-meme et il vaut* 1*:*

- *pour tout* $i = 1, \cdots, r$
$$m_{ij_i} = 1.$$
- *Pour tout* $i = 1, \cdots, r$ *et tout* $1 \leqslant i' \neq i \leqslant d'$, *on a*
$$m_{i'j_i} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & m_{13} & 0 & 0 & \cdots & m_{1d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & m_{2d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 9.1 (Gauss). *Toute matrice est ligne-equivalente a une matrice echelonnee reduite.*

PROPOSITION 9.5. *Deux matrices ligne-equivalentes et echelonnees reduites sont egales.*

COROLLAIRE 9.1. *(Unicite de la forme echelonne reduite) Soit $M \in M_{d' \times d}(K)$ une matrice alors M est ligne-equivalente a une unique matrice echelonnee reduite (qu'on appelle la forme echelonnee reduite de M).*

Applications

Calcul du Rang

PROPOSITION 9.6. *Si M et N sont lignes equivalentes*

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N).$$

Ensuite on a

PROPOSITION 9.7. *Si R est echelonnee avec r echelons alors*

$$\mathrm{rg}(R) = r.$$

Matrices Inversibles

PROPOSITION 9.8 (Critere d'inversibilite par operations elementaires). *Soit* $M \in M_d(K)$ *une matrice carree alors* M *est inversible ssi* M *est ligne equivalente a la matrice identite* Id_d.

$$I_d = T_n T_{n-1} \cdots T_1 M$$

$$\Longleftrightarrow \quad M^{-1} = T_n \times \cdots \times T_1$$

Le principe des vases communicants permet d'inverser une matrice.

THÉORÈME 9.2. *Le groupe lineaire* $\mathrm{GL}_d(K)$ *est engendre par les matrices des transformations elementaires*

$$T_{ij}, D_{i,\lambda},\ Cl_{ij,\mu},\ i,j \leqslant d,\ \lambda,\mu \in K,\ \lambda \neq 0,\ \text{et si } i=j,\ \mu \neq -1.$$

En d'autres termes (puisque l'ensemble des matrices de transformations elementaires est stable par inverse) tout matrice $M \in GL_d(K)$ *s'ecrit comme un produit fini de ces matrices.*

Preuve: Si M est inversible il existe

$T_1, \dots, T_n$ des matrices de TELs

tq $Id_d = T_n T_{n-1} \dots T_1 . M$

$$\Rightarrow M = T_1^{-1} \dots T_{n-1}^{-1} T_n^{-1} = T_1' \times \dots \times T_n'$$

avec T_i' des matrices de TELs

Extraction d'une famille génératrice

Pb : $G = \{w_1, \dots, w_e\} \subset V$ $\dim V = d$

$W = \mathrm{Vect}\, G \subset V$

On cherche une base de W

Soit B une base de V. On identifie les elts de V avec des vecteurs lignes K^d

$L_B : V \xrightarrow{\sim} K^d$

$$L_i := L_B(w_i) \in K^d \quad i = 1 \dots l$$

Soit $M \in Mat_{l \times d}(K)$ formée des lignes

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1d} \\ & & & \\ x_{l1} & x_{l2} & \dots & x_{ld} \end{pmatrix}$$

Soit R la forme echelonnée reduit de M

$$R = \begin{pmatrix} L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L'_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L'_1 \\ \\ L'_r \\ 0_d \\ 0_d \end{pmatrix}$$

$r \leq d$ le nb de pivots de R

$= \text{rg } R = \text{rg } M$

$= \dim W$

alors les vecteurs correspondants

$$w'_1 = L_B^{-1}(L'_1)$$

$$\vdots$$

$$w'_r = L_B^{-1}(L'_r)$$ forment une base de W.

Rmq : on peut compléter de la même base B'_W en une base de V en prenant

comme vecteur complémentaires les

$L_B^{-1}(e_j)$ e_j = elts la base canonique de K^d

pour j qui n'est pas un indice de pivot de R

PROPOSITION 9.9 (Description matricielle d'une base d'un SEV). *Soit $M \in M_{l\times d}(K)$ la matrice dont les l lignes sont formees des vecteurs lignes L_i, $i \leqslant l$. Soit R la matrice echelonee reduite associee a M et*

$$L'_i = \mathrm{Lig}_i(R),\ i \leqslant l$$

l'ensemble des lignes de R alors si R possede r echelons on a

$$\dim W = r$$

et les vecteurs de V correspondants aux r premieres lignes

$$\mathscr{B}_W = \{w'_i = \mathrm{Lig}^{-1}_{\mathscr{B}}(L'_i),\ i \leqslant r\}$$

forment une base de W (et les $l - r$ autres vecteurs sont nuls).

Rmq: (Completion) Correct p158

$\mathbb{Q}^4$: $w_1 = (1,2,3,4)$ $w_2 = (2,0,-1,1)$

$w_3 = (-1,2\,4\,3)$ $W = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Base de W $= \{(1,2\,3\,4), (0\,1\,7/4\,7/4)\}$

Resolution de Systemes lineaires

$\varphi : V \mapsto W$

$w \in W$ on cherche

$$Sol_{\varphi}(w) = \{ v \in V \text{ tq } \varphi(v) = w \}$$

Solutions du système linéaire $\varphi(v) = w$ où $v \in V$ est l'inconnue

- Si $W = O_W$ on dit que le système linéaire est homogène ou sans second membre.

- En général (si $W \neq O_W$) on dit que le système est non-homogène ou avec second membre.

Si $w = 0_W$ Sol $\varphi(0_W) = \ker \varphi$

Rmq : en fait l'equation $\varphi(v) = w$ d'inconnue v

est un cas particulier du Pb suivant

Soient G, H des gpes et

$\varphi : G \to H$ un morphisme

etant donne $w \in H$ on cherche les

$v \in G$ tq $\varphi(v) = w$.

On cherche si $w \in \mathrm{Im}\,\varphi$ et

si oui quels sont les antecedents.

THÉORÈME 9.4 (Resolution d'equations dans les espaces vectoriels). *Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $w \in W$, on pose*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = \varphi^{(-1)}(\{w\}) = \{v \in V,\ \varphi(v) = w\} \subset V$$

la preimage de w par φ. En particulier $\mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_W) = \ker\varphi$. Alors $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est

- *soit $w \notin \varphi(V)$ et $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ est l'ensemble vide,*
- *soit $w \in \varphi(V)$ et il existe $v^0 \in V$ tel que $\varphi(v^0) = w$ et alors*

$$\mathrm{Sol}_\varphi(w) = v^0 + \mathrm{Sol}_\varphi(\mathbf{0}_d) = v^0 + \ker\varphi = \{v_0 + k,\ k \in \ker\varphi\}.$$

Preuve : si $w \notin \varphi(V)$ $\mathrm{Sol}_\varphi(w) = \emptyset$

- si $w \in \varphi(V)$ il existe v^0 tq $\varphi(v^0) = w$

soit $v \in \mathrm{Sol}_\varphi(w)$ (ie $\varphi(v) = w$)

on a $\varphi(v - v^0) = \varphi(v) - \varphi(v^0)$

$$= w - w = 0_W$$

$$\Longrightarrow \quad v - v_0 \in \ker \varphi$$

$$v \in v_0 + \ker \varphi \qquad \mathrm{Sol}_\varphi(w) \subset v_0 + \ker \varphi$$

Reciproquement on a $v_0 + \ker \varphi \subset \mathrm{Sol}_\varphi(w)$

□

Corollaire 9.2. *Avec les notations precedente, on a en particulier*

- *si* $\dim \ker \varphi = 0$ *(cad.* $\ker \varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ *et* φ *est injective),* $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede* 0 *ou* 1 *element pour tout* w*.*
- *si* $\mathrm{rg}\varphi = \dim \varphi(V) = \dim(W)$ *(cad.* $\varphi(V) = W$ *et* φ *est surjective)* $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede au moins un element pour tout* w*.*
- *Si* $\dim V = \dim W$ *et que* φ *est ou bien injective ou bien surjective,* φ *est bijective et pour tout* w*,* $\mathrm{Sol}_\varphi(w)$ *possede exactement un element.*

Traduction Matricielle

$\varphi : V \longrightarrow W \qquad Sol_{\varphi}(w) = ?$

$B \subset V \qquad B' \subset W$

$M = mat_{B'B}(\varphi)$ si $v = \sum_{j=1}^{d} v_j e_j$

$d = dim V$

$W = \sum_{i=1} w_i f_i$

le système $\varphi(v) = w$

at equivalent au systeme

$$M.\mathrm{Col}(v) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \mathrm{Col}(w)$$

$$\mathrm{Col}(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Col}(w) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$T_1 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$T_2 T_1 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = T_2 T_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$T_n \times \cdots \times T_1 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1d} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{d1} & m_{12} & \cdots & m_{d'd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = T_n \times \cdots \times T_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ w'_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Pi_n \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{d'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ w'_r \\ w'_{r+1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

d_1 d_2 d_3 $\mathbb{R}$

à la fin on obtient une matrice réduite R et un vecteur colonne $\begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{d'} \end{pmatrix}$ où les w'_i sont des c.l. des $w_1, \dots, w_{d'}$

en particulier on obtient pour $i > r$

$$w'_i = 0 \quad i > r$$

Cet ensemble d'equation $w'_i = 0$ $i = r+1 \dots d'$ defini une representation cartesienne de $\mathrm{Im}\,\varphi$. si le recteur w choisi ne verifie pas $w'_i = 0$ $i = r+1, \dots, d'$ alors $w \notin \mathrm{Im}\,\varphi$ et $\mathrm{Sol}_\varphi(w) = \emptyset$

DÉFINITION 9.7. *Les inconnues v_{j_i} pour j_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ etant un echelon sont appelles inconnues principales du systeme. Les inconnues v_j pour $j \leqslant d$ qui n'est pas un echelon sont appelles inconnues libres du systeme.*

Pour resoudre le systeme (si tous les $w'_i = 0$ $i = r+1 \dots d'$)

il suffit de fixer arbitrairement les valeurs des inconnues libres et de resoudre le systemen ↑ suivant les inconnues principale.
reduit

en particulier si $w = 0_N$ cela va donner tous les elts du noyau.

Operations sur les Colonnes

DÉFINITION 9.8. *Les operations elementaires sur les colonnes d'une matrice sont les applications suivantes de* $M_{d'\times d}(K)$ *vers* $M_{d'\times d}(K)$*: pour* $i, j \in \{1, \cdots, d\}$ *et* $\lambda \in K^\times$ *et* $\mu \in K$

(I) Transposition: Echanger deux colonnes $i \neq j \leqslant d'$ *de* M*:*

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$

(II) Dilatation: Multiplier la i*-eme colonne par un scalaire* $\lambda \neq 0$*:*

$$C_i \to \lambda.C_i.$$

(III) Combinaison Lineaire: Additionner a la colonne i *un multiple scalaire de la la* j*-ieme colonne pour* $i \neq j$*:* $\mu \in K$

$$C_i \to C_i + \mu C_j$$

Ces transformations sont appellees transformations elementaires *sur les colonnes d'une matrice.*

PROPOSITION 9.10. *Une operation elementaire sur les colonnes d'une matrice M equivaut a une operation elementaire sur les lignes de $M' = {}^tM$.*

Une telle transformation est donnee par multiplication par la droite

$$M \mapsto M.{}^tT_l$$

par la transposee d'une matrice de transformation elementaire sur les lignes T_l en composant les operations suivantes

$$M \mapsto {}^tM \mapsto T_l.{}^tM \mapsto {}^tT_l.{}^tM = M.{}^tT_l = M.T_c.$$

Il en resulte que des transformations sont bijectives et lineaires.

Définition 9.9. *On dit que N est colonne-equivalente a M ssi il existe une suite de transformations elementaires qui transforme M en N.*

– De maniere equivalente, N est colonne-equivalente a M ssi il existe une suite finie de matrices de transformations elementaires (sur les colonnes) telle que N est obtenue a partir de M par multiplications a droite par cette suite de matrices.

Proposition 9.11. *La relation etre "colonne-equivalente" est une relation d'equivalence sur $M_{d' \times d}(K)$.*

– De plus deux matrices M, N colonnes-equivalentes sont equivalentes au sens de la notion d'equivalence de deux matrices de la Definition 7.10. En particulier elles ont meme rang.


THE
MATRIX

Determinants

That object was to present the subject as a continuous chain of arguments, separated from all accessories of explanation or illustration, a form which I venture to think better suited for a treatise on exact science than the semi -colloquial semi-logical form often adopted by Mathematical writers.

Lewis Carroll (1867)

Prelude : $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det M := ad - bc$. $\det MN = \det M \times \det N$

$M \in GL_2(K)$ ssi $\det M \neq 0_K$

et alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $M \times \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = I_2$

Formes multilineaires

DÉFINITION 10.1. *Soit V un K-espace vectoriel et $n \geqslant 1$ un entier. Une forme multilineaire en n variables sur V est une application*

$$\Lambda : \begin{array}{ccc} V^n & \mapsto & K \\ (v_1, \cdots, v_n) & \mapsto & \Lambda(v_1, \cdots, v_n) \end{array}$$

telle que pour tout $i = 1, \cdots, n$ et tout choix de $n-1$ vecteurs $v_j \in V$, $j \neq i$, l'application Λ "restreinte a la i-ieme composante"

$$v_i \in V \mapsto \Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) \in K$$

est lineaire:

$$\Lambda(v_1, \cdots, \lambda.v_i + v_i', \cdots, v_n) = \lambda.\Lambda(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_n) + \Lambda(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_n).$$

L'ensemble des formes multilineaires en n variables sur V est note

$$\mathrm{Mult}^{(n)}(V, K) \text{ ou bien } (V^*)^{\otimes n} (\text{notation "produit tensoriel"}).$$

Exemples : $n=1$ $\Lambda : V \longrightarrow \Lambda(v) \in K$

Λ est une forme linéaire.

- $n=2$: forme bilinéaire.

$V = K$. soit $\Lambda(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$\Lambda(\lambda x_1 + x_1', x_2) = (\lambda x_1 + x_1') \cdot x_2 = \lambda x_1 x_2 + x_1' x_2$$
$$= \lambda \Lambda(x_1, x_2) + \Lambda(x_1', x_2)$$

$$\Lambda(x_1, \lambda x_2 + x_2') = x_1(\lambda x_2 + x_2') = \lambda x_1 x_2 + x_1 x_2'$$
$$= \lambda \Lambda(x_1, x_2) + \Lambda(x_1, x_2')$$

$n=2 \quad V = K^2$

Produit scalaire euclidien

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K$$

$$\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) \longrightarrow (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := x_1x_2 + y_1y_2$$

$\lambda \in K$

$$(\lambda x_1 + x_1', \lambda y_1 + y_1') \cdot (x_2, y_2)$$

$$\left(\lambda (x_1,y_1) + (x_1',y_1')\right) \cdot (x_2,y_2)$$

$$= (\lambda x_1 + x_1') \cdot x_2 + (\lambda y_1 + y_1') y_2$$

$$= \lambda x_1 x_2 + x'_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 + y'_1 y_2$$

$$= \lambda (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x'_1, x'_1) \cdot (x_2, y_2)$$

Idem pour la variable (x_2, y_2)

Produit alterné : $\wedge$

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K$$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2)$$

$$= x_1 y_2 - y_1 x_2 \left(= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right)$$

On a que

$$\big(\lambda(x_1,y_1)+(x_1',y_1')\big)\wedge(x_2,y_2) =$$

$$\lambda(x_1,y_1)\wedge(x_2,y_2)+(x_1',y_1')\wedge(x_2,y_2)$$

et $(x_1,y_1)\wedge\big(\lambda(x_2,y_2)+(x_2',y_2')\big) =$

$$\lambda(x_1,y_1)\wedge(x_2,y_2)+(x_1,y_1)\wedge(x_2',y_2')$$

Exemple General : $n \geq 1$

$$l_1, \dots, l_n : V \longrightarrow K$$

$$l_1 \otimes l_2 \otimes \dots \otimes l_n : V^n \longrightarrow K$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longrightarrow l_1(v_1) \times l_2(v_2) \times \dots \times l_n(v_n)$$

comme les l_i sont linéaire en la variable v_i $l_1 \otimes \dots \otimes l_n$ est multilinéaire.

$$\ell_1 \otimes \ell_2 \otimes \cdots \otimes \ell_n \neq \ell_1 \cdot \ldots \cdot \ell_n$$

$$\ell_1 \cdot \ldots \cdot \ell_n : V \longrightarrow \ell_1(v)\ell_2(v)\ldots\ell_n(v)$$

$$\ell_1 \otimes \ell_2 \otimes \ldots \otimes \ell_n \neq \ell_2 \otimes \ell_1 \otimes \ldots \otimes \ell_n$$

$$\ell_1(v_1)\ell_2(v_2)\ldots\ell_n(v_n) \neq \ell_2(v_1)\ell_1(v_2)\ell_3(v_3)\ldots\ell_n(v_n)$$

prenons $n=2$

on peut considérer

la CL sur le K-ev V^2

$$\lambda(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (\lambda v_1, \lambda v_2) + (v_1', v_2')$$

$$= (\lambda v_1 + v_1', \lambda v_2 + v_2')$$

$$l_1 \otimes l_2 \left(\lambda(v_1, v_2) + (v_1', v_2') \right)$$

$$= l_1 \otimes l_2 (\lambda v_1 + v_1', \lambda v_2 + v_2')$$

$$= \ell_1(\lambda v_1 + v_1')\,\ell_2(\lambda v_2 + v_2')$$

$$= \left(\lambda\,\ell_1(v_1) + \ell_1(v_1')\right) \times \left(\lambda\,\ell_2(v_2) + \ell_2(v_2')\right)$$

$$= \lambda^2 \ell_1(v_1)\ell_2(v_2) + \lambda\,\ell_1(v_1)\ell_2(v_2')$$

$$+ \lambda\,\ell_1(v_1')\ell_2(v_2) + \ell_1(v_1')\ell_2(v_2')$$

$$= \lambda^2\,\ell_1 \otimes \ell_2(v_1, v_2) + \lambda\,\ell_1 \otimes \ell_2(v_1, v_2')$$

$$+ \lambda\,\ell_1 \otimes \ell_2(v_1', v_2) + \ell_1 \otimes \ell_2(v_1', v_2')$$

$$\neq \lambda \ell_1 \otimes \ell_2 (v_1, v_2) + \ell_1 \otimes \ell_2 (v_1', v_2')$$

$\ell_1 \otimes \ell_2$ n'est pas une forme linéaire sur $l'EV$ $V \times V$.

$\Lambda : V^n \to K$ multilinéaire

$$\Lambda(\lambda_1 v_1 + \mu_1 v_1', \dots, \lambda_n v_n + \mu_n v_n') = ?$$

$$= \text{somme de } 2^n \text{ termes}$$

$$= \sum_{I \sqcup J = \{1,\dots,n\}} \lambda_I \mu_J \Lambda(v_I, v_J')$$

où $I \sqcup J$ désigne une partition de $\{1, \dots, n\}$ en 2 sous-ensemble disjoints

(il y a 2^n telles partitions)

$$\lambda_I = \prod_{i \in I} \lambda_i \qquad \lambda_J = \prod_{j \in J} \mu_j$$

$$(\nu_I, \nu_J') = (\nu_1'', \dots, \nu_n'')$$

$$\nu_i'' = \nu_i \text{ si } i \in I$$
$$= \nu_i' \text{ si } i \in J$$

$$\Lambda(v_I, v_J') = \Lambda(v_1'', \ldots, v_n'')$$

Example $I \cup J = \{1\} \cup \{2, \ldots, n\}$

$$(v_I, v_J) = (v_1, v_2', \ldots, v_n')$$

$I \cup J = \{2, \ldots, n\} \cup \{1\}$

$$(v_I, v_J) = (v_1', v_2, \ldots, v_n)$$

PROPOSITION 10.1. *L'ensemble* $\mathrm{Mult}^{(n)}(V,K) = (V^*)^{\otimes n}$ *des formes multilineaires en n variables est un K-espace vectoriel quand on le muni de l'addition et de la multiplication par les scalaires usuelle pour les fonctions a valeurs dans K:* $\forall \Lambda, \Xi \in (V^*)^{\otimes n}$

$$(\lambda\Lambda + \Xi)(v_1, \cdots, v_n) = \lambda\Lambda(v_1, \cdots, v_n) + \Xi(v_1, \cdots, v_n).$$

Preuve. $n=2$ $\Lambda, \Xi \in \mathrm{Mult}^{(2)}(V,K)$

$\Lambda : (v_1, v_2) \to \Lambda(v_1, v_2)$ $\lambda \in K$

$\Xi : (v_1, v_2) \to \Xi(v_1, v_2)$

$(\lambda\Lambda + \Xi) : (v_1, v_2) \to \lambda\Lambda(v_1, v_2) + \Xi(v_1, v_2)$

On veut mq $\lambda\Lambda + \Xi$ est linéaire en v_1 et en v_2

$$(\lambda\Lambda+\Xi)(\mu v_1 + v_1', v_2)$$

$$= \lambda\Lambda(\mu v_1 + v_1', v_2) + \Xi(\mu v_1 + v_1', v_2)$$

$$= \lambda\mu\Lambda(v_1, v_2) + \lambda\Lambda(v_1', v_2)$$

$$+ \mu\Xi(v_1, v_2) + \Xi(v_1', v_2)$$

$$= \mu\,(\lambda\Lambda+\Xi)(v_1, v_2) + (\lambda\Lambda+\Xi)(v_1', v_2)$$

Utilisant que Λ et Ξ sont linéaires en v_2 on montre que

$$(\lambda\Lambda+\Xi)(v_1, \mu v_2+v_2') = \mu(\lambda\Lambda+\Xi)(v_1, v_2) + (\lambda\Lambda+\Xi)(v_1, v_2')$$

THÉORÈME 10.1 (Dimension et base de l'espace des formes multilineaires). *Soit* $d = \dim V$, $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\} \subset V$ *une base et* $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\} \subset V^*$ *la base duale. Alors* $V^{*\otimes n}$ *est de dimension finie egale a* d^n*; une base de* $V^{*\otimes n}$ *est donnee par l'ensemble des formes multilineaires de la forme*

$$\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \text{ quand } j_1, \cdots, j_n \text{ parcourent } \{1, \cdots, d\}.$$

On note cette base

$$(\mathscr{B}^*)^{\otimes n} = \{\mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*, \ (j_1, \cdots, j_n) \in [1, d]^n\}.$$

Pour tout $\Lambda \in (V^*)^{\otimes n}$ *on a la decomposition*

$$\Lambda = \sum_{j_1, \cdots, j_n \leqslant d} \cdots \sum \Lambda(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots \mathbf{e}_{j_n}) \mathbf{e}_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_n}^*$$

Si $n=2$ $(B^*)^{\otimes n} = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, e_2^* \otimes e_1^*, e_2^* \otimes e_2^*\}$

Preuve: cas $n=2$ soit $\Lambda \in \text{Mult}^{(2)}(V, K)$

$$\Lambda : (v_1, v_2) \longrightarrow \Lambda(v_1, v_2)$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{d} x_{ij} e_j$$

$$\wedge\left(\sum_{j=1}^{d} x_{1j} e_j, \sum_{j'=1}^{d} x_{2j'} e_{j'}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} x_{1j} \wedge\left(e_j, \sum_{j'=1}^{d} x_{2j'} e_{j'}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} x_{1j} \sum_{j'=1}^{d} x_{2j'} \wedge(e_j, e_{j'})$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{j'=1}^{d} x_{1j} x_{2j'} \Lambda(e_j, e_{j'})$$

$$x_{1,j} x_{2,j'} = e_j^*(v_1) e_{j'}^*(v_2)$$

$$= e_j^* \otimes e_{j'}^*(v_1, v_2)$$

$$\Lambda(v_1, v_2) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{j'=1}^{d} \Lambda(e_j, e_{j'}) e_j^* \otimes e_{j'}^*(v_1, v_2)$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{d} \sum_{j'=1}^{d} \Lambda(e_j, e_{j'})\, e_j^1 \otimes e_{j'}^2$$

$\Rightarrow$ la famille de forme bilinéaire

$\{ e_j^2 \otimes e_{j'}^1 \;\; j, j' \leq d \}$ est génératrice de $(V^*)^{\otimes 2}$

Mq la famille est libre.

Soient $\lambda_{i,j'}$ $i,j' \leqslant d$ des scalaires

tq

$$\Lambda = \sum_{i,j' \leqslant d} \lambda_{i,j'} e_j^* \otimes e_{j'}^* = \underline{0}$$

On veut montrer que les $\lambda_{i,j'} = 0$

ou encore pour tout $i, i' \leq d$

$$\Lambda(e_i, e_{i'}) = \sum_{j, j' \leq d} \lambda_{jj'} e_j^*(e_i) e_{j'}^*(e_{i'}) = 0$$

$$e_j^*(e_i) = \delta_{i=j}$$

$$0 = \lambda_{ii'} 1 \times 1 = \lambda_{ii'} \quad \forall i, i' \leq d.$$

la famille $\{e_j^* \otimes e_{j'}^*, j j' \leq d\}$ est libre.

En général: on procède par récurrence sur n.

On suppose que

$$(B^*)^{\otimes n} = \left\{ e_{d_1}^* \otimes e_{d_2}^* \otimes \cdots \otimes e_{d_n}^* \;\middle|\; (d_1, \dots, d_n) \in [\![1, d]\!]^n \right\}$$

est une base de $(V^*)^{\otimes n}$ et on va montrer que c'est vrai pour $(B^*)^{\otimes n+1} \subset (V^*)^{\otimes n+1}$

Generatrice : soit

$$\Lambda : (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \to \Lambda(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$$

une forme multilin en $n+1$ variables

On fixe $v_{n+1} \in V$ et on considère

$$\Lambda_{v_{n+1}} : (v_1, \dots, v_n) \to \Lambda(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$$

C'est une forme multilin en n variables

On a vu que

$$\Lambda_{v_{n+1}} = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in[1,d]^n} \Lambda_{v_{n+1}}(e_{j_1},\dots e_{j_n})\, x^{j_1}\cdot e_{j_1}\otimes\dots\otimes e_{j_n}$$

que vaut $\Lambda_{v_{n+1}}(e_{j_1},\dots,e_{j_n})$?

$$= \Lambda(e_{j_1},\dots,e_{j_n},v_{n+1})$$

pour tout choix de $(j_1, \dots, j_n) \in [\![1, d]\!]^n$

la fonction

$$\Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}, v_{n+1})$$ est linéaire

en v_{n+1}

$$\Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}, v_{n+1}) = \sum_{j_{n+1}=1}^{d} \Lambda(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}, e_{j_{n+1}}) \, e^*_{j_{n+1}}(v_{n+1})$$

On a donc $\forall$

$$\wedge = \sum_{(d_1,\dots d_n)\in[1,d]^n} e^{d_1}\otimes\dots\otimes e^{d_n} \times$$

$$\sum_{d_{n+1}=1}^{d} \wedge(e_{d_1},\dots,e_{d_n},e_{d_{n+1}})\cdot e^{d_{n+1}}$$

$$= \sum_{(d_1,\dots,d_n,d_{n+1})\in[1,d]^{n+1}} \wedge(e_{d_1},\dots,e_{d_n},e_{d_{n+1}})\, e^{d_1}\otimes\dots\otimes e^{d_n}\otimes e^{d_{n+1}}$$

On montre que la famille $(D^*)^{\otimes n+1}$

est libre : soient d^{n+1} scalaires

$\lambda_{d_1,\dots,d_{n+1}}$ pour $(d_1,\dots,d_{n+1}) \in [\![1,d]\!]^{n+1}$

$$\Lambda := \sum_{(d_1,\dots,d_{n+1})} \lambda_{d_1,\dots,d_{n+1}} e^*_{d_1} \otimes \dots \otimes e^*_{d_{n+1}} = \underline{0}$$

on evalue Λ en $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n+1}})$

$$\Lambda(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n+1}}) = \sum_{(d_1, \dots d_{n+1})} \lambda_{d_1 \dots d_{n+1}} \cdot$$

$$\| \qquad e^*_{d_1} \otimes \dots \otimes e^*_{d_{n+1}}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n+1}})$$

$$= \delta_{d_1 = i_1} \delta_{d_2 = i_2} \cdots \delta_{d_{n+1} = i_{n+1}}$$

$$0 = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \quad \forall (i_1, \dots, i_{n+1}) \in [1, d]^{n+1}$$

□

Formes Symmetriques/ Alternées

$V = K^2$ $\quad v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2 = (x_2, y_2)$

Produit Scalaire:

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1$$

il est symetrique

$$v_1 \cdot v_2 = v_2 \cdot v_1$$

Produit Alterne : est alterne

$$v_1 \wedge v_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

$$= y_2 x_1 - x_2 y_1$$

$$= -(x_2 y_1 - y_2 x_1)$$

$$= -v_2 \wedge v_1$$

$\Lambda \in \mathrm{Mult}^{(n)}(V)$ $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$

a partir de la fabrique une nouvelle forme multlin

$$(ij).\Lambda : (v_1, \dots \underset{i}{v_i}, \dots \underset{j}{v_j} \dots v_n)$$

$$\longrightarrow \Lambda(v_1, \dots \underset{j}{v_j} \dots \underset{i}{v_i} \dots v_n)$$

On dit que Λ est symetrique si

$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$

$(ij)\Lambda = \Lambda$.

Alternée si

$\forall i \neq j \in \{1, \dots n\}$

$(ij)\Lambda = -\Lambda$.